

Сценарии перехода к детерминированному хаосу при колебаниях жидкости в цилиндрических баках

А.Ю. Швец, В.А. Сиренко

*Нац. техн. ун-т Украины "КПИ", Киев
E-mail: alex.shvets@bigmir.net*

Розглядається гідродинамічна система, що складається із циліндричного бака, частково заповненого рідиною, та електродвигуна обмеженої потужності, який збуджує горизонтальні коливання бака. Побудовано карти динамічних режимів системи. Проведено детальне вивчення сценаріїв переходу між різними типами хаотичних атракторів. Виявлено перехід між гіперхаотичними атракторами за сценарієм узагальненої переміжності. Досліджено фазові портрети, спектри ляпуновських характеристичних показників, розподіли спектральної густини, перерізи й відображення Пуанкаре та фазопараметричні характеристики системи.

The hydrodynamic system which consists of the cylindrical tank partially filled with a liquid, and the electric motor of the limited power, exciting horizontal oscillations of a tank is considered. Maps of dynamic regimes of system are constructed. The detailed study of the scenarios of transition between chaotic attractors of various types is carry out. It is revealed transition between hyperchaotic attractors under the scenario of the generalised intermittency. Phase portraits, spectrum of Lyapunov's characteristic exponents, distribution of an invariant measure, Poincare's sections and maps and bifurcation tree of system are investigated.

1 Введение

Проведение исследований колебаний свободной поверхности жидкости в цилиндрических баках имеет большое прикладное значение, так как многие современные машины и механизмы в качестве составных

частей имеют цилиндрические баки частично заполненные жидкостью [1–5]. Важной особенностью в исследовании таких гидродинамических систем является учет неидеальности источника возбуждения колебаний бака с жидкостью [6, 7].

В работе исследуется хаотическая динамика нелинейной динамической системы типа "бак с жидкостью–электродвигатель" при горизонтальном возбуждении колебаний бака. Для такой системы строятся карты динамических режимов. Полученные карты наглядно представляют взаимное расположение областей существования регулярных и хаотических аттракторов в области допустимых значений параметров системы. Карты динамических режимов позволяют существенно сократить время при проведении различного рода экспериментов по практическому подтверждению существования различных типов динамических режимов.

Особое внимание в работе уделяется изучению сценариев перехода к детерминированному хаосу в исследуемой гидродинамической системе. Проведенные в работе исследования являются продолжением и развитием исследований начатых в работах [7–10].

2 Математическая модель системы

Рассмотрим динамическую систему, состоящую из бака, частично заполненного жидкостью, колебания которого в горизонтальной плоскости возбуждаются электродвигателем ограниченной мощности. В работах [7–10] проведено детальное построение математической модели такой системы. В этих работах показано, что математическая модель системы "бак с жидкостью – электродвигатель" может быть описана в виде системы дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
 \frac{dp_1}{d\tau} &= \alpha p_1 - \left[\beta + \frac{A}{2}(p_1^2 + q_1^2 + p_2^2 + q_2^2) \right] q_1 + B(p_1 q_2 - p_2 q_1) p_2, \\
 \frac{dq_1}{d\tau} &= \alpha q_1 + \left[\beta + \frac{A}{2}(p_1^2 + q_1^2 + p_2^2 + q_2^2) \right] p_1 + B(p_1 q_2 - p_2 q_1) q_2 + 1, \\
 \frac{d\beta}{d\tau} &= N_3 + N_1 \beta - \mu_1 q_1, \\
 \frac{dp_2}{d\tau} &= \alpha p_2 - \left[\beta + \frac{A}{2}(p_1^2 + q_1^2 + p_2^2 + q_2^2) \right] q_2 - B(p_1 q_2 - p_2 q_1) p_1, \\
 \frac{dq_2}{d\tau} &= \alpha q_2 + \left[\beta + \frac{A}{2}(p_1^2 + q_1^2 + p_2^2 + q_2^2) \right] p_2 - B(p_1 q_2 - p_2 q_1) q_1,
 \end{aligned} \tag{1}$$

в которой p_1, q_1 и p_2, q_2 — коэффициенты разложения амплитуд колебаний свободной поверхности жидкости соответственно по первой и второй основной доминантной модам; β — расстройка частот; μ_1 — коэффициент пропорциональности вибрационного момента; α — коэффициент сил вязкого демпфирования; N_1, N_3 — параметры статической характеристики электродвигателя. Константы A и B зависят от радиуса бака и высоты налитой в него жидкости [7].

Приведенная математическая модель (1) учитывает неидеальность возбуждения, т.е. обратное влияние колебательной системы, в данном случае бака с жидкостью, на источник возбуждения колебаний — электродвигатель ограниченной мощности. Такого рода системы находят широкое применение при исследовании динамики тел, несущих жидкость, к примеру особенностей ракет-носителей космических аппаратов [1].

3 Исследование динамических режимов системы

Исследование динамического поведения системы "бак с жидкостью—электродвигатель" начнем с построения карты динамических режимов. Предположим, что параметры системы принимают значения: $A = 1.12$; $B = -1.531$; $N_1 = N_3 = -1$. В качестве бифуркационных рассмотрим параметры μ_1 и α . Как известно для идентификации типа установившегося режима динамической системы проводится расчет спектра ляпуновских характеристических показателей (ЛХП) и анализируется сигнатура спектра ЛХП [7, 11]. На рис. 1 приведены карты динамических режимов, которые получены в результате анализа и обработки данных компьютерных экспериментов. При построении карт динамических режимов интервалы изменения бифуркационных параметров сканируются с достаточно малым шагом. В каждой сканируемой точке проводится вычисление спектра ЛХП и анализируется его сигнатура. При этом качественно определяется тип установившегося динамического режима. В необходимых случаях для точного определения типа установившегося режима дополнительно проводится анализ иных характеристик аттракторов: фазовых портретов, сечений и отображений Пуанкаре, Фурье-спектров и др. После проведенного анализа на карту наносится точка соответствующего оттенка серого цвета [11].

На картах динамических режимов (рис. 1) приведены области пяти различных типов динамических режимов. Белым цветом нанесе-

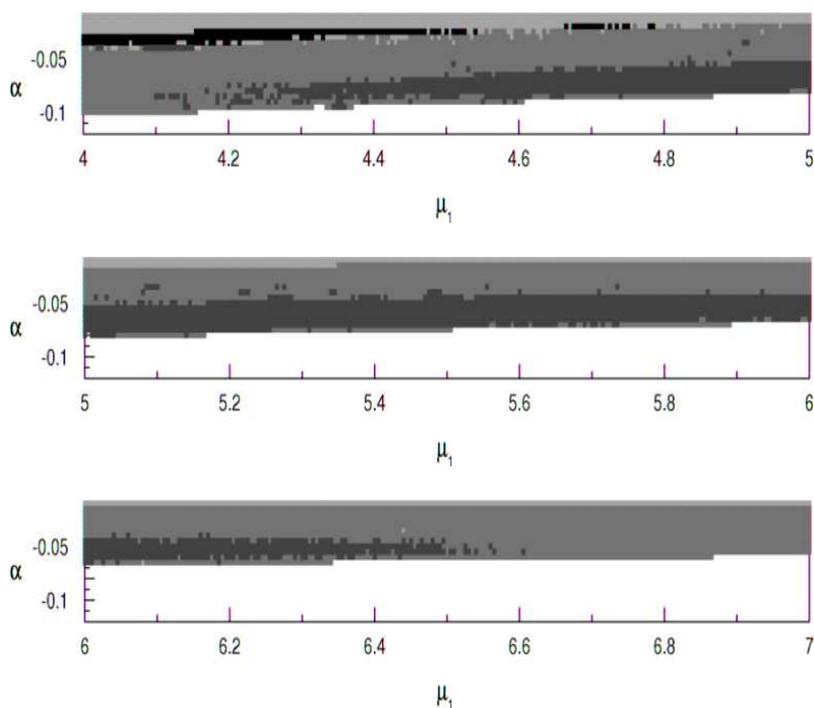


Рис. 1: Карты динамических режимов системы

ны области значений параметров μ_1, α при которых установившимся режимом системы будут положения равновесия. Сигнатура спектра ЛХП положений равновесия имеет вид $\langle -, -, -, -, - \rangle$. Светло-серым цветом нанесены области значений параметров μ_1, α при которых установившимися режимами системы будут предельные циклы с сигнатурой спектра ЛХП $\langle 0, -, -, -, - \rangle$. Серым цветом нанесены области, в которых установившимися режимами системы будут хаотические аттракторы. Сигнатура спектра ЛХП хаотических аттракторов имеет вид $\langle +, 0, -, -, - \rangle$. Областям черного цвета соответствуют квазипериодические режимы системы с сигнатурой спектра ЛХП $\langle 0, 0, -, -, - \rangle$. И, наконец, темно-серым цветом нанесены области существования гиперхаотических аттракторов, которые занимают значительную область карты и "врезаются" в область хао-

тических аттракторов. Гиперхаотические аттракторы имеют в своем спектре ЛХП два положительных показателя $\langle +, +, 0, -, - \rangle$.

Используя описанную в работах [7, 10] методику компьютерных исследований неидеальных динамических систем, детально изучим изменение различных типов установившихся динамических режимов системы (1) вдоль вертикального сечения карты (рис. 1) при $\mu_1 = 4.125$. Также, особое внимание уделим изучению особенностей реализации сценариев переходов типа "гиперхаос-гиперхаос".

На рис. 2 приведены зависимости первых двух ляпуновских характеристических показателей спектра ЛХП системы (1) от параметра α . Как видно из рис. 2 существуют интервалы изменения параметра α , в которых $\lambda_1 = 0, \lambda_2 < 0$. Эти интервалы изменения α расположены в светло-серых областях карт динамических режимов (рис. 1). В данных интервалах установившимися режимами системы будут периодические режимы. Между интервалами существования периодических режимов заметны интервалы в которых значения $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Таким значениям параметра α соответствуют квазипериодические режимы системы (1). На рис. 1 такие интервалы лежат в черной области карт.

Основным практическим критерием существования в системе хаотических аттракторов есть наличие хотя-бы одного положительного ляпуновского характеристического показателя в спектре ЛХП. На рис. 2 заметны значительные интервалы изменения параметра α при которых $\lambda_1 > 0, \lambda_2 = 0$. На данных интервалах установившимися режимами системы будут хаотические аттракторы, которые на картах (рис. 1) обозначены серыми областями. И наконец, в окрестности значения параметра $\alpha = -0.04$ на рис. 2 замечен интервал в котором значения двух показателей λ_1, λ_2 являются положительными. На данном интервале установившимися режимами системы будут гиперхаотические аттракторы. Такие режимы на картах динамических режимов (рис. 1) обозначены темно-серыми областями.

На рис. 3 приведена фазопараметрическая характеристика системы, так называемое бифуркационное дерево. В данном случае эта характеристика построена относительно фазовой переменной p_1 . Заметим что, бифуркационные деревья построенные относительно других координат системы будут качественно подобными, приведенному в данной работе. На основании структуры построенных карт динамических режимов (рис. 1) и графиков ляпуновских показателей (рис. 2) можем описать структуру бифуркационного дерева. Так участкам "кроны" этого дерева состоящих из отдельных "ветвей" соответству-

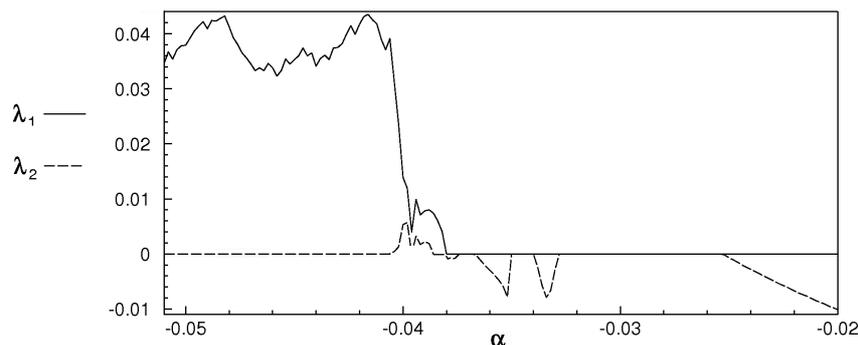


Рис. 2: Графики зависимостей лиapunовских характеристических показателей от параметра α

ют предельные циклы системы. Густо затемненным частям бифуркационного дерева, слева и в центре рис. 3, соответствуют квазипериодические аттракторы. В свою очередь, густо затемненным частям в правой части рис. 3 соответствуют хаотические аттракторы. Причем хаотические аттракторы могут быть как собственно хаотическими, так и гиперхаотическими.

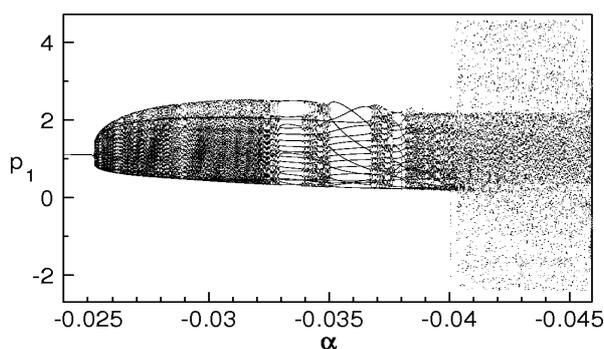


Рис. 3: Фазопараметрическая характеристика системы по координате p_1

Как показали проведенные численные расчеты, при $-0.0102 < \alpha < -0.0254$ в системе существует однитактный предельный цикл. Проекция фазового портрета предельного цикла такого типа приведена на рис. 4а. При уменьшении значения параметра $\alpha = -0.0254$,

существующий предельный цикл теряет устойчивость и в системе, в результате бифуркации Неймарка, возникает квазипериодический аттрактор. На рис. 4б, приведена проекция фазового портрета квазипериодического аттрактора построенного при $\alpha = -0.03$. Траектории квазипериодического аттрактора всюду плотно покрывают тороидальную поверхность и с некоторым почти периодом возвращаются в произвольную окрестность аттрактора.

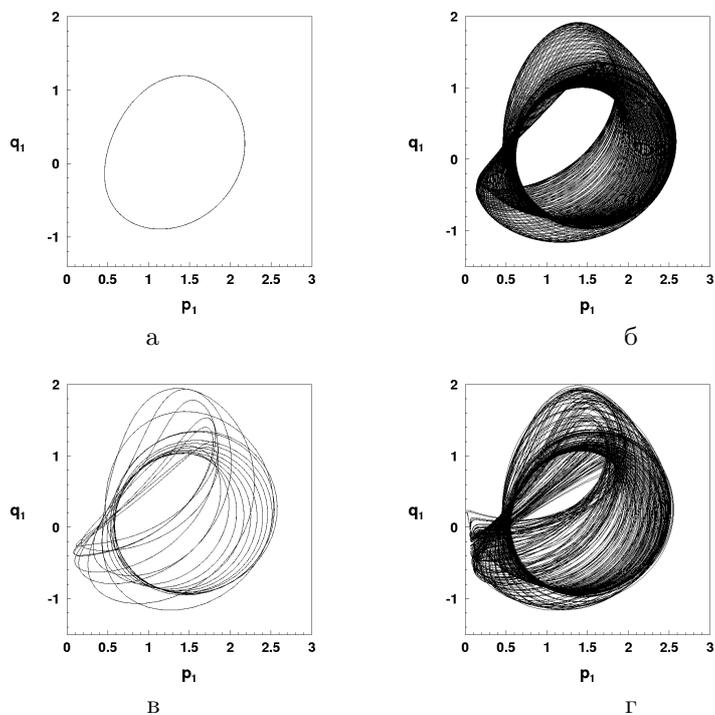


Рис. 4: Проекция фазовых портретов предельных циклов при $\alpha = -0.025$ (а), $\alpha = -0.0352$ (в), квазипериодического аттрактора при $\alpha = -0.03$ (б) и хаотического аттрактора при $\alpha = -0.0384$ (г).

При дальнейшем уменьшении значения параметра $\alpha = -0.0352$, происходит разрушение тора и возникновение резонансного цикла на торе (рис. 4в). Последующие уменьшения значения параметра приводят к чередованиям предельных торов и резонансных предельных циклов на торе. Такие последовательные смены динамических режи-

мов отчетливо просматриваются на рис. 2 и рис. 3. Но уже при значении $\alpha = -0.0382$ существующий резонансный предельный цикл исчезает и в системе возникает хаотический аттрактор (рис. 4г). Несмотря на некоторую схожесть фазовых портретов предельного тора и хаотического аттрактора следует подчеркнуть принципиальные отличия между ними. Так старший ляпуновский показатель хаотического аттрактора является положительным. Все траектории хаотического аттрактора неустойчивы. Моменты времени возврата траектории в произвольную окрестность аттрактора непредсказуемы и представляют собой некоторую хаотическую последовательность. Отметим, что в данном случае реализуется сценарий перехода к хаосу через квазипериодические режимы [11].

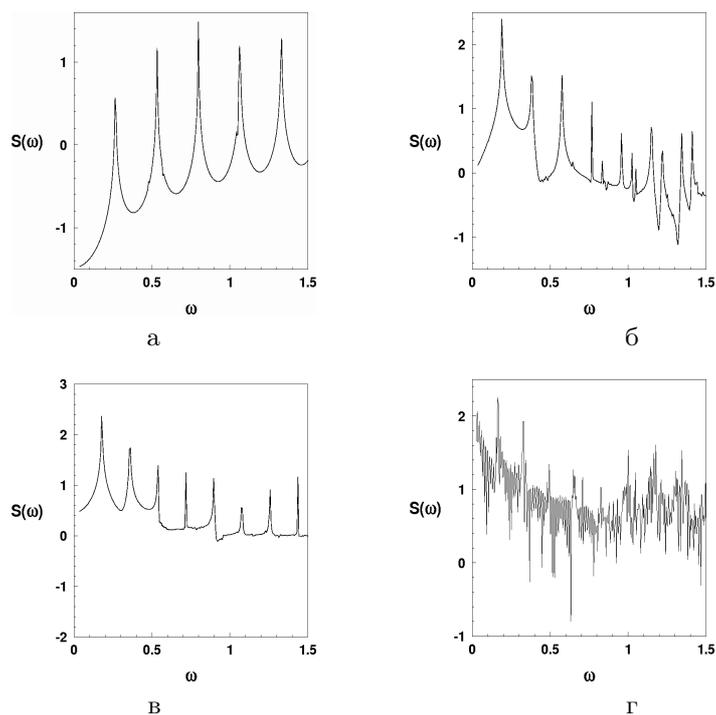


Рис. 5: Фурье-спектры предельных циклов при $\alpha = -0.025$ (а), $\alpha = -0.0352$ (в), тора при $\alpha = -0.03$ (б) и хаотического аттрактора при $\alpha = -0.0384$ (г).

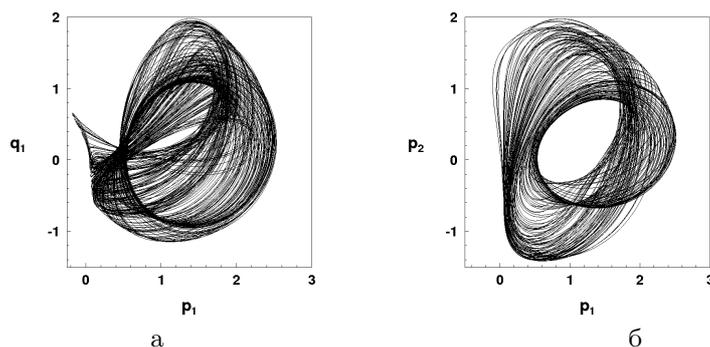


Рис. 6: Проекция фазового портрета "малого" гиперхаотического аттрактора при $\alpha = -0.0388$.

На рис. 5 представлены распределения спектральной плотности рассмотренных выше аттракторов. Фурье-спектры предельных циклов (рис. 5а,в) являются дискретными и гармоничными – с четкими равноудаленными пиками. Соответственно, Фурье-спектр квазипериодического режима (рис. 5б) остается дискретным, но при этом теряется его гармоничность. В отличие от спектров регулярных аттракторов, распределение спектральной плотности хаотического аттрактора (рис. 5г) является сплошным.

Полученный хаотический аттрактор (рис. 4г) существует на довольно малом интервале изменения параметра, и уже при $\alpha = -0.0388$ наблюдается бифуркация "хаос-гиперхаос", в результате которой вместо хаотического аттрактора в системе возникает гиперхаотический аттрактор. Проекция фазового портрета гиперхаотического аттрактора приведены на рис. 6а,б. Несмотря на некоторую схожесть проекций гиперхаотического аттрактора (рис. 6а) и хаотического аттрактора (рис. 4г) следует обратить внимание на важное отличие между аттракторами таких типов. Так, спектр ЛХП гиперхаотического аттрактора содержит два положительных ляпуновских показателя в отличие от спектра ЛХП хаотического аттрактора, который имеет лишь один положительный ляпуновский показатель. Следовательно у гиперхаотического аттрактора существуют два направления в фазовом пространстве, по которым разбегаются его близкие фазовые траектории.

При дальнейшем уменьшении значения параметра $\alpha = -0.0402$

в системе возникает гиперхаотический аттрактор нового типа. Проекция фазового портрета такого аттрактора приведены на рис. 7. Прежде всего следует отметить, что в сравнении с гиперхаотическим аттрактором, приведенным на рис. 6 значительно возрастает объем области локализации аттрактора в фазовом пространстве. Соответственно заметно возрастают амплитуды колебаний фазовых переменных. Кроме того у возникшего гиперхаотического аттрактора приблизительно в три раза возрастает величина старшего ляпуновского показателя, следовательно значительно увеличивается скорость разбегания близких фазовых траекторий. Резкое возрастание старшего ляпуновского показателя отчетливо видно при изучении рис. 2 в окрестности $\alpha = -0.04$. В дальнейшем будем называть гиперхаотические аттракторы типа изображенного на рис. 7 "большими", а гиперхаотические аттракторы типа приведенного на рис. 6 "малыми".

Как показали проведенные исследования, переход "гиперхаос–гиперхаос" происходит по сценарию обобщенной перемежаемости, который был описан в работах [7, 10] для переходов типа "хаос–хаос". Приведенные иллюстрации рис. 7а-г проясняют механизм возникновения гиперхаотического аттрактора. На рис. 7в,г приведены увеличенные фрагменты более темных частей соответствующих проекций "большого" аттрактора (рис. 7а,б). Эти увеличенные фрагменты по форме напоминают проекции "малого" гиперхаотического аттрактора (рис. 6а,б). Движение траекторий по гиперхаотическому аттрактору состоит из двух фаз. В первой фазе траектории, в течении достаточно долгого времени, совершают хаотические блуждания вдоль витков исчезнувшего "малого" гиперхаотического аттрактора (рис. 7в,г). Такая фаза была названа грубо–ламинарной [7, 10]. В дальнейшем, в непредсказуемый момент времени, происходит турбулентный всплеск и траектории уходят в отдаленные области фазового пространства. Такая фаза движений называется турбулентной. Вышеописанный процесс повторяется бесконечное число раз. Отметим, что в отличие от классической перемежаемости здесь хаотическими по сути есть обе основные фазы движений, как грубо–ламинарная, так и турбулентная.

Подобные закономерности, характерные для перемежаемости, наблюдаются и при анализе сечений и отображений Пуанкаре. На рис. 8 приведены проекции сечения Пуанкаре "малого" (рис. 8а) и "большого" (рис. 8б,в) гиперхаотических аттракторов. В качестве секущей выбиралась плоскость $\beta = -1.2$. Заметим, что рис. 8в являет-

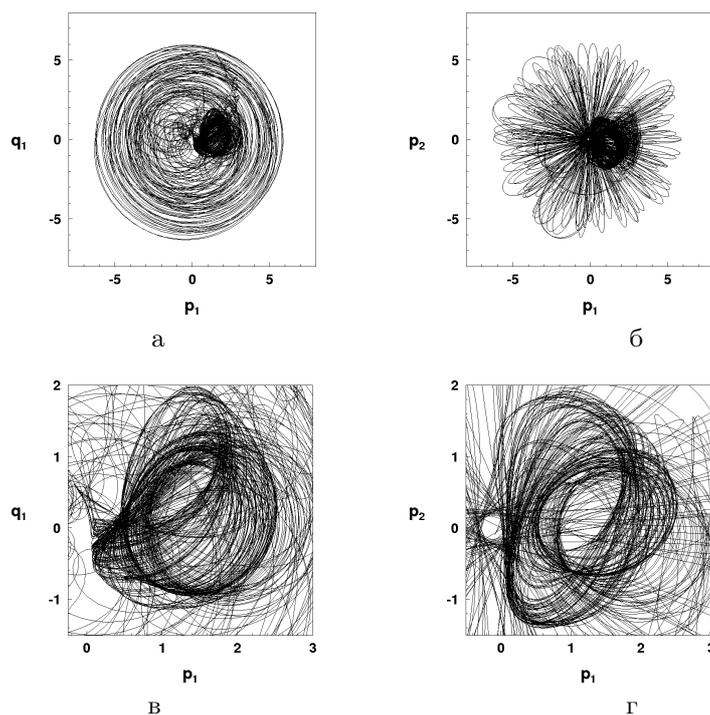


Рис. 7: Проекция фазового портрета "большого" гиперхаотического аттрактора при $\alpha = -0.0402$.

ся увеличенным фрагментом центральной части рис. 8б. Построенные сечения представляют собой развитые хаотические множества точек. Внимательное изучение этих рисунков позволяет заметить качественное сходство сечения Пуанкаре "малого" гиперхаоса с густо затемненной центральной частью сечения Пуанкаре "большого" гиперхаоса. Фактически сечение Пуанкаре "малого" гиперхаоса является подмножеством соответствующего сечения "большого" гиперхаоса. Этот факт еще раз подчеркивает перемежаемость аттракторов. Грубо-ламинарной фазе такой перемежаемости соответствуют точки расположенные в густо затемненной центральной части рис. 8б. Точки расположенные в более светлых участках этого рисунка отвечают турбулентной фазе перемежаемости.

Такие же закономерности перехода "гиперхаос-гиперхаос" про-

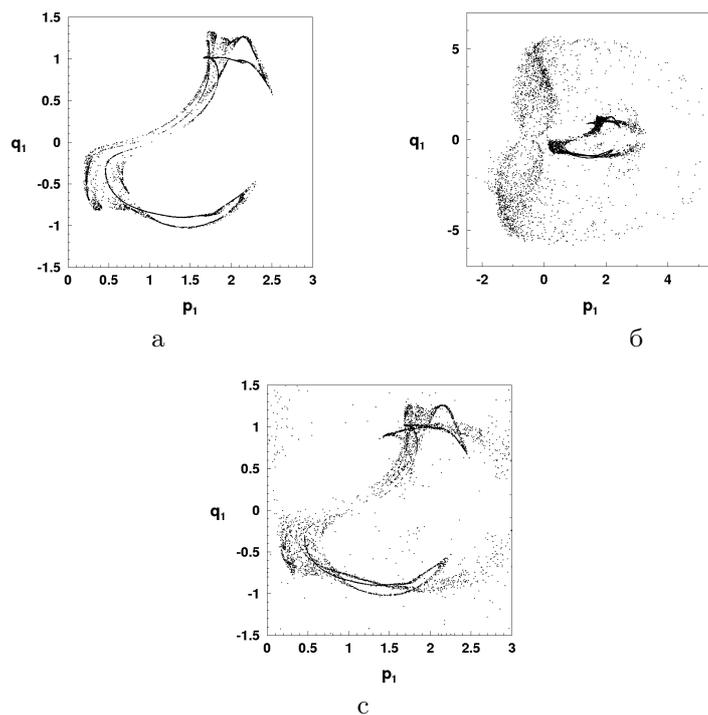


Рис. 8: Проекция сечения Пуанкаре гиперхаотических аттракторов при $\alpha = -0.0388$ (а), $\alpha = -0.0402$ (б)-(в).

слеживаются и при анализе отображений Пуанкаре. На рис. 9 приведены отображения Пуанкаре построенные для фазовой переменной q_1 "малого" (рис. 9а) и "большого" (рис. 9б,в) гиперхаотических аттракторов. Отображение Пуанкаре "малого" гиперхаоса (рис. 9а) почти совпадает с густо затемненной центральной частью отображения Пуанкаре "большого" гиперхаоса (рис. 9б). Это особенно четко видно при изучении рис. 9а и рис. 9в. Таким образом, исчезающий "малый" гиперхаос служит грубо-ламинарной "основой" для возникающего "большого" гиперхаоса. Чрезвычайно сложная структура отображений Пуанкаре делает невозможной любую аппроксимацию системы (1) одномерным дискретным отображением.

Переход "гиперхаос-гиперхаос", по сценарию обобщенной пере-

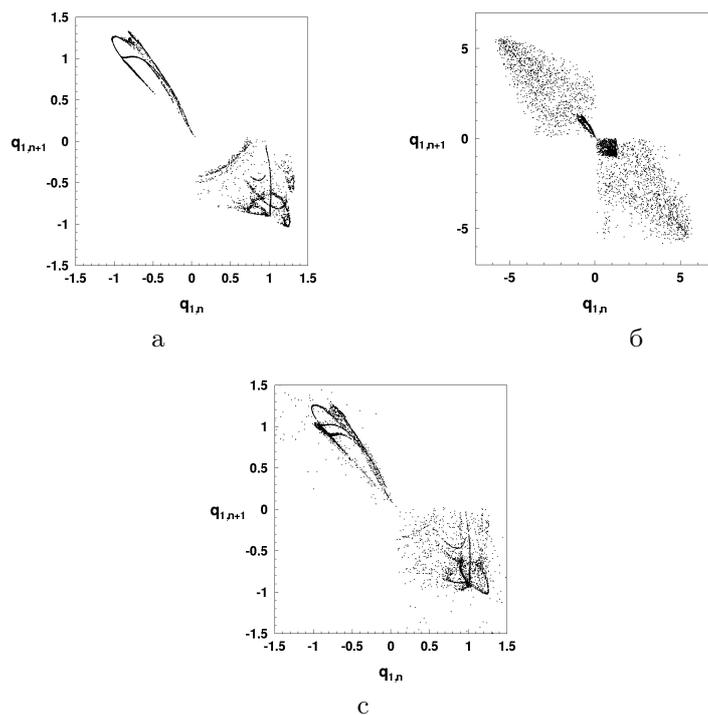


Рис. 9: Проекция отображения Пуанкаре гиперхаотических аттракторов при $\alpha = -0.0388$ (а), $\alpha = -0.0402$ (б)-(в).

межаемости также отчетливо заметен при изучении фазопараметрической характеристики системы (рис. 3). При таком переходе, в структуре бифуркационного дерева вокруг его центральной более затемненной части появляются хаотические множества точек. Груболаминарной фазе перемежаемости соответствует затемненная центральная часть бифуркационного дерева. Турбулентным всплескам — хаотические точечные множества, которые находятся по разные стороны от центральной затемненной части.

При исследовании других вертикальных сечений карты динамических режимов (рис. 1), которые проходят через области существования гиперхаотических аттракторов, наблюдается аналогичные особенности сценариев переходов типа “гиперхаос–гиперхаос”.

4 Заключение

Описанные в статье результаты исследований динамической системы типа “бак с жидкостью–электродвигатель”, при горизонтальном возбуждении бака с жидкостью, позволили расширить представление относительно ее динамических режимов и сценариев переходов в хаосе. Для данной системы удалось обнаружить и описать гиперхаотические аттракторы. Было установлена возможность реализации нового сценария обобщенной перемежаемости и при переходах “гиперхаос–гиперхаос”.

- [1] *Луковский И.А.* Математические модели нелинейной динамики твердых тел с жидкостью. — Киев: Наукова думка, 2010. — 408 с.
- [2] *Ibrahim R.A.* Liquid Sloshing Dynamics: Theory and Applications. — Cambridge: Cambridge University Press. — 2005. — 948 p.
- [3] *Miles J.W.* Nonlinear surface waves in closed basins // J. Fluid Mech. — 1976. — **75**(3) — P. 419–448.
- [4] *Miles J.W.* Internally resonant surface waves in circular cylinder // J. Fluid Mech. — 1984. — **149**. — P. 1–14.
- [5] *Miles J.W.* Resonantly forced surface waves in circular cylinder // J. Fluid Mech. — 1984. — **149**. — P. 15–31.
- [6] *Kononenko V.O.* Vibrating system with a limited power-supply. — London: Pliffe, 1969. — 298 p.
- [7] *Краснопольская Т.С., Швец А.Ю.* Регулярная и хаотическая динамика систем с ограниченным возбуждением. — Москва – Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2008. — 280 с.
- [8] *Krasnopolskaya T.S., Shvets A.Yu.* Regular and chaotic surface waves in a liquid in a cylindrical tank // Sov. Appl. Mech. — 1990. — **26**. — P. 787–794.
- [9] *Krasnopolskaya T.S., Shvets A.Yu.* Chaotic surface waves in limited power-supply cylindrical tank vibrations // J. Fluids & Structures. — 1994. — **8**(1). — P. 1–18.
- [10] *Krasnopolskaya T.S., Shvets A.Yu.* Dynamical chaos for a limited power supply oscillations in cylindrical tanks // J. of Sound and Vibration. — 2009. — **322**. — P. 532–553.
- [11] *Кузнецов С.П.* Динамический хаос. — М.: Физматлит, 2006.— 356 с.